ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN QUYNH

NHÓM CON HỮU HẠN CỦA NHÓM $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ VÀ MỘT ỨNG DỤNG VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN QUYNH

NHÓM CON HỮU HẠN CỦA NHÓM $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ VÀ MỘT ỨNG DỤNG VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với TS. Đoàn Trung Cường, đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K7D trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, 2015 **Vũ Văn Quynh**

Học viên Cao học Toán K7D,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Phương trình hàm là một dạng toán hay và quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi. Đề thi và lời giải các phương trình hàm rất phong phú, liên quan đến nhiều khía cạnh như đại số, giải tích, số học, tổ hợp. Mục đích của luận văn này là xét một lớp phương trình hàm liên kết với các phép biến đổi phân tuyến tính có bậc hữu hạn.

Ta bắt đầu bằng một ví dụ:

Ví dụ. (Putnam 1971) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

Để giải phương trình hàm này, ta xét ánh xạ $g : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ được xác định bởi $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Khi đó

$$g^2(x) = g(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)} = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x-1};$$

$$g^3(x) = g(g^2(x)) = \frac{-\frac{1}{x-1} - 1}{-\frac{1}{x-1}} = -\frac{-x}{-1} = x.$$

Gọi id là ánh xạ đồng nhất của $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ thì $G = \{id, g, g^2\}$ cùng với phép hợp thành các ánh xạ là một nhóm xyclic cấp 3. Kí hiệu$f_1 = f, f_2 = f \circ g, f_3 = f \circ g^2$, ta có

$$f_1(x) + f_2(x) = 1 + x \ \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

Thay x bằng $g(x)$ và $g^2(x)$, ta có hai phương trình sau:

$$f(g(x)) + f(g^2(x)) = 1 + g(x), \text{hay} f_2(x) + f_3(x) = 1 + f(x);$$
$$f(g^2(x)) + f(x) = 1 + g^2(x), \text{hay} f_3(x) + f_1(x) = 1 + g^2(x).$$

Vậy ta có một hệ phương trình tuyến tính theo ba ẩn f_1, f_2, f_3 là

$$\begin{cases} f_1 + f_2 &= 1 + x \\ f_2 + f_3 &= 1 + \dfrac{x-1}{x} \\ f_3 + f_1 &= 1 + \dfrac{-1}{x-1} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình cụ thể cho ta $f_1(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$ hay $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$. Hàm số này thỏa mãn phương trình hàm ban đầu, do vậy nó là nghiệm mong muốn.

Tổng quát, cho $D \subseteq \mathbb{R}$ là một miền và $g_1, \ldots, g_n : D \to D$ là các hàm số liên tục sao cho $G = \{id, g_1, \ldots, g_n\}$ cùng với phép hợp thành các ánh xạ là một nhóm hữu hạn. Cho các hàm $a_0, a_1, \ldots, a_n, b : D \to \mathbb{R}$. Chúng ta quan tâm đến phương trình hàm sau

$$a_0 f + a_1 f \circ g_1 + \cdots + a_n f \circ g_n = b. \qquad (1)$$

Để tìm được hàm f thỏa mãn phương trình này, ta thay x bởi id, $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$. Khi đó, ta sẽ có được một hệ phương trình tuyến tính với ẩn là $f, f \circ g_1, f \circ g_2, \ldots, f \circ g_n$. Khi đó ta có thể giải hệ này, bằng các phương pháp tiêu chuẩn của đại số tuyến tính như phương pháp Cramer.

Trong lời giải của phương trình (1) cấu trúc nhóm của tập hợp các phép biến đổi $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ là yếu tố quyết định. Trong phạm vi luận văn này chúng ta chỉ quan tâm phương trình hàm (1) cho bởi các nhóm hữu hạn gồm các phép biến đổi phân tuyến tính. Các nhóm này đều đẳng cấu với một nhóm con hữu hạn của nhóm $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$, vì vậy để mô tả rõ phương trình hàm (1), chúng tôi sẽ đi mô tả cấu trúc của tất cả các nhóm con hữu hạn của nhóm tuyến tính xạ ảnh $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$.

Các kết quả và thông tin trong luận văn được viết dựa vào bản thảo bài báo *"Functional equations and finite groups substitutions"* của Mihály Bessenyei, American Mathematical Monthly 2010, và bài báo *"Finite subgroups of* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ *and functional equations"* của Đoàn Trung Cường.

Luận văn được chia thành ba chương với nội dung chính như sau:

Chương 1: Chương này trình bày một số kiến thức về nhóm và ma trận cần thiết cho các tính toán về nhóm $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ trong chương sau.

Chương 2: Nhóm con hữu hạn của $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$. Trong chương này chúng tôi sẽ đi mô tả cấu trúc của tất cả các nhóm con hữu hạn của nhóm $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$. Kết quả chính của chương này là Mệnh đề 2.1.1 và Định lý 2.2.3 khẳng định rằng các nhóm con hữu hạn của nhóm $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ hoặc là nhóm xyclic C_n hoặc là nhóm nhị diện D_n. Hơn nữa các phần tử sinh của các nhóm này cũng được mô tả khá cụ thể.

Chương 3: Ứng dụng vào phương trình hàm. Từ các kết quả trong chương 2, chúng tôi xây dựng các phương trình hàm cụ thể gắn với các nhóm con của nhóm $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$. Các ví dụ này có thể được dùng như bài tập cho học sinh phổ thông thuộc diện khá, giỏi.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 11 năm 2015

Vũ Văn Quynh

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này giới thiệu kiến thức về nhóm là cơ sở áp dụng cho các chương sau. Nội dung bao gồm các định nghĩa, tính chất về nhóm, nhóm xyclic, nhóm Diheral, nhóm đối xứng, nhóm thay phiên, cùng các kiến thức về ma trận, điều kiện để ma trận là chéo hóa được.

Các kiến thức này sẽ được áp dụng vào việc hỗ trợ xác định các nhóm con hữu hạn của nhóm $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ ở Chương 2.

1.1 Nhóm

Mục này giới thiệu các kiến thức cơ bản về nhóm như đã nêu ở trên.

Định nghĩa 1.1.1. Cho $G \neq \emptyset$ với phép toán "." $: G \times G \to G$ thỏa mãn các tính chất

(i) Kết hợp: $(a.b).c = a.(b.c), \ \ \forall a, b, c \in G$;

(ii) Tồn tại phần tử đơn vị $e \in G$ thỏa mãn $a.e = e.a = a, \ \ \forall a \in G$;

(iii) Tồn tại phần tử nghịch đảo: $\forall a \in G, \exists b \in G : a.b = b.a = e$, kí hiệu $b = a^{-1}$.

Khi đó, G với phép toán "." lập thành một nhóm, ta kí hiệu là $(G, .)$ hay ngắn gọn G. Nhóm $(G, .)$ được gọi là nhóm giao hoán (hay nhóm Abel) nếu $a.b = b.a, \ \ \forall a, b \in G$.

Chú ý 1.1.2. Cho $(G, .)$ là một nhóm, khi đó

(i) Phần tử đơn vị là duy nhất.

(ii) $\forall a \in G$ phần tử nghịch đảo của a là duy nhất.

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử $(G, .)$ là một nhóm, $H \neq \emptyset, H \subseteq G$ là một nhóm con của G nếu $(H, .)$ cũng là một nhóm.

Mệnh đề 1.1.4. *Giả sử* $(G, .)$ *là một nhóm,* $H \neq \emptyset, H \subseteq G$. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $(H, .)$ *là nhóm con của nhóm* $(G, .)$

(ii) $\forall a, b \in H : a.b \in H, a^{-1} \in H$

(iii) $\forall a, b \in H, a.b^{-1} \in H$

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử G là một nhóm với đơn vị e và $a \in G$. Nếu $a^m \neq e$, với mọi $m > 0$, thì ta nói a có cấp vô hạn. Trái lại thì số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho $a^m = e$ được gọi là cấp của a, kí hiệu là $\operatorname{ord}(a)$.

Kí hiệu $|G|$ là số phần tử của G. Nếu G có hữu hạn phần tử thì ta nói G có cấp $|G|$ hữu hạn hay G là nhóm hữu hạn. Nếu G có vô hạn phần tử thì ta nói G có cấp vô hạn hay nhóm G là vô hạn. Trong phần tiếp theo ta xét một số nhóm đặc biệt như nhóm xyclic, Diheral, nhóm đối xứng,...

Định nghĩa 1.1.6. G là một nhóm xyclic nếu tồn tại một phần tử a $\in G$ sao cho với mọi phần tử $b \in G$, có một biểu diễn $a^m = b$ với m $\in \mathbb{Z}$ nào đó. Khi đó a được gọi là phần tử sinh của G. Kí hiệu $G = \langle a \rangle$.

Giả sử $G = \langle a \rangle$ là một nhóm xyclic hữu hạn có cấp n. Khi đó $|G| = n = \operatorname{ord}(a)$ và $G = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$, ta kí hiệu nhóm này là C_n.

Với nhóm xyclic $G = \langle a \rangle$ ta có $|G|$ =$\operatorname{ord}(a)$. Do đó cấp của G là số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $a^n = e$.

Xét đa giác đều n cạnh P_n với $n \geq 3$. Gọi a là phép quay mặt phẳng xung quanh tâm của P_n một góc theo chiều kim đồng hồ bằng $\frac{2\pi}{n}$, còn b là phép đối xứng qua một đường thẳng đi qua tâm và một đỉnh của P_n.

Mệnh đề 1.1.7. *Tất cả các phép đối xứng của P_n (tức là phép biến đổi đẳng cự của mặt phẳng biến P_n thành chính nó) được liệt kê như sau*

$$e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, \ldots, a^{n-1}b.$$

Chúng lập thành một nhóm, kí hiệu là D_n và gọi là nhóm Diheral cấp $2n$. Ta có

$$D_n = \langle a, b |\ a^n = e, b^2 = e, (ab)^2 = e\rangle.$$

Giả sử T là một tập hợp nào đó, ta dễ dàng kiểm tra lại rằng tập $S(T)$ tất cả các song ánh trên T cùng với phép hợp thành các ánh xạ lập thành một nhóm, với các phần tử đơn vị của $S(T)$ là ánh xạ đồng nhất id_T trên T, phần tử nghịch đảo của $\alpha \in S(T)$ là ánh xạ ngược α^{-1}.

Định nghĩa 1.1.8. Nhóm $S(T)$ được gọi là nhóm đối xứng trên tập T. Mỗi phần tử của $S(T)$ được gọi là một phép thế trên T.

Đặc biệt, nếu $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ thì $S(T)$ được kí hiệu là S_n và gọi là nhóm đối xứng trên n phần tử.

Ta có

(i) S_n là một nhóm hữu hạn và $|S_n| = n! = 1.2 \ldots n$.

(ii) $D_3 \cong S_3$.

(iii) $n \neq 3$ thì $D_n \ncong S_n$ (do chúng có số phần tử khác nhau).

Xét nhóm đối xứng S_n. Với $n \geq 2$, ta đặt $\Delta_n = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \in \mathbb{Z}$. Xét tác động của $\alpha \in S_n$ trên $\pm\Delta_n$, được định nghĩa như sau:

$$\alpha(\Delta_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha(j) - \alpha(i)),\ \alpha(-\Delta_n) = -\alpha(\Delta_n)$$